Travaux pratiques | [M] TP n°3

Charge de l'électron & Points de Lagrange

Ce TP possède deux parties indépendantes. Dans une première partie, nous allons déterminer le signe et la charge de l'électron. Dans une deuxième partie, nous allons déterminer la position de 3 des 5 points de Lagrange du système Terre - Soleil.

I - L'électron

Nous allons ici déterminer expérimentalement le signe et la charge de l'électron (en supposant sa masse connue).

I.1 - Étude théorique

On considère l'expérience suivante. Un métal chauffé libère des électrons avec une vitesse de sortie supposée nulle. Ces derniers sont soumis à une différence de potentiel U, leur conférant une vitesse initiale $\vec{\mathrm{v}}_0$. Ils sont ensuite soumis à un champ magnétique constant $\vec{B} \perp \vec{\mathrm{v}}_0$.

Donnée : masse de l'électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

- Donner l'expression de v_0 en fonction de m, e et U.
- Rappeler la nature de la trajectoire et son sens de parcours dans le champ magnétique. Donner l'expression du rayon R en fonction de m, v_0, e et B.

I.2 - Mise en application

- À l'aide d'un Teslamètre, mesurer le sens et la norme de $\vec{B}$. En déduire le signe de la charge de l'électron.
- Mesurer ΔV à l'aide d'un voltmètre et R à l'aide d'une règle (attention aux effets de parallaxe !). En déduire la valeur absolue de la charge de l'électron e.
- Déterminer l'incertitude-type (type B) sur votre mesure $u(e)$.

II - Points de Lagrange

II.1 - Définition

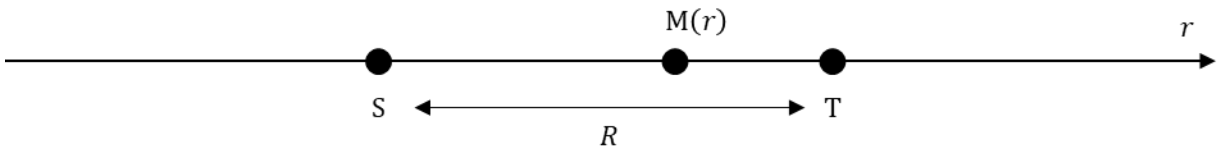
Considérons le système Terre - Soleil (TS).

On suppose que la Terre est en orbite circulaire de rayon R autour du soleil. On se place dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_T$ centré sur le centre de masse du soleil et dont l'un des axes est confondu avec l'axe TS. Dans $\mathcal{R}_T$ (qui est non galiléen), le soleil est fixe à l'origine et la Terre fixe à la distance R de l'origine.

Un **point de Lagrange** est un point qui ne subit aucune force dans $\mathcal{R}_T$. Dans le référentiel héliocentrique, ce point tourne donc autour du soleil avec la même vitesse angulaire de rotation que la Terre (une révolution par an).

II.2 - Énergie potentielle & potentiel gravitationnel

L'objectif est de trouver s'il existe des points de Lagrange sur l'axe TS. Pour cela, nous allons étudier l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ d'un point matériel M de masse m, situé sur l'axe TS à une distance r du soleil.



- Rappeler l'expression de l'énergie potentiel de gravitation.

Remarques :

- Cette énergie étant définie en repère sphérique, la distance r est par définition positive. On peut étendre cette expression aux r négatifs en remplaçant r par sa valeur absolue $|r|$.
- De plus, le référentiel d'étude étant non-galiléen, on admet que tous les résultats de cours restent valables à condition de considérer également l'énergie potentielle centrifuge :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,c}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2}$$

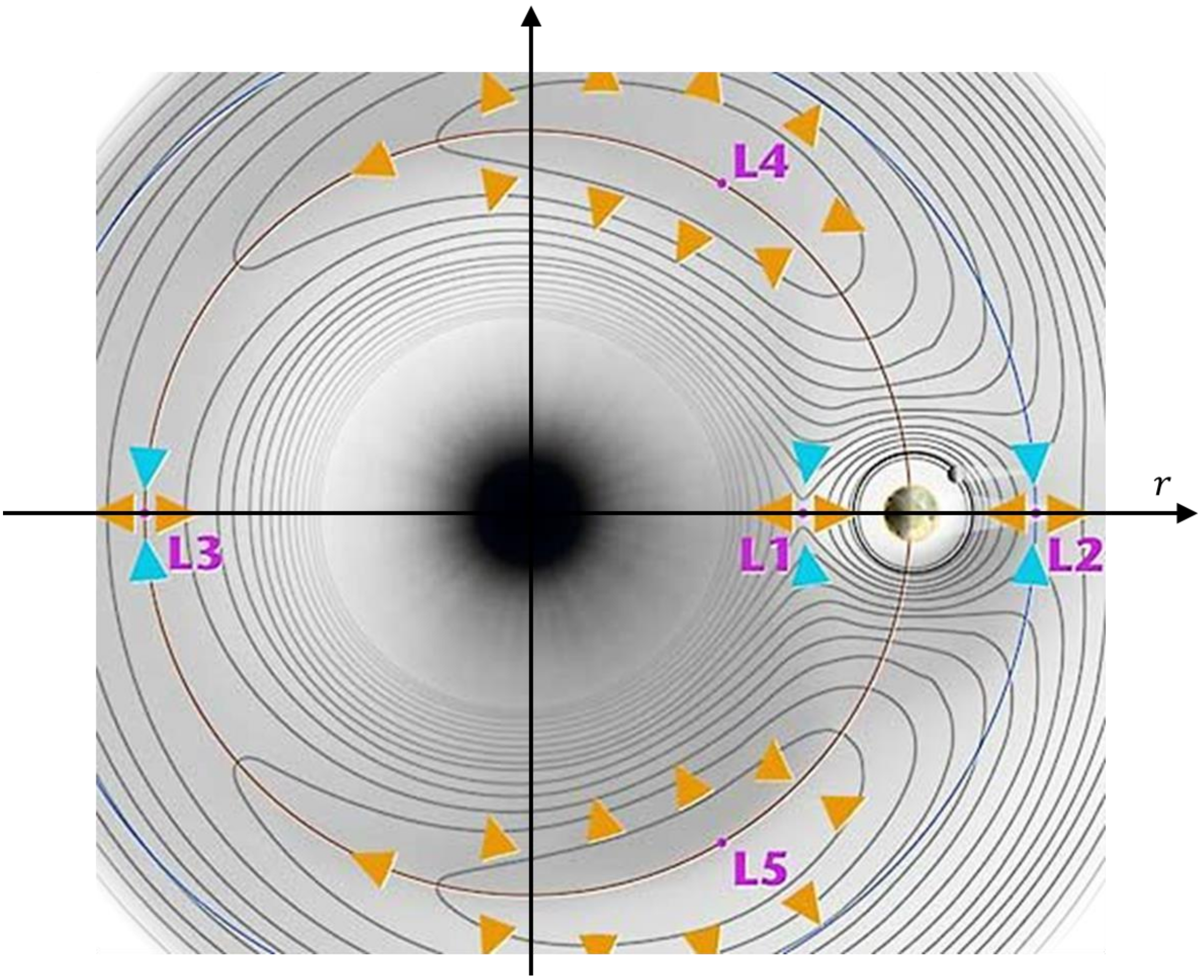
où $\omega = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ la vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}_T$ par rapport au référentiel héliocentrique.

⌂ En déduire que l'énergie potentielle totale du point M vaut :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p,tot}}(r) = m \cdot V(r) \quad \text{avec :} \quad \boxed{V(r) = -G\frac{M_S}{|r|} - G\frac{M_T}{|R-r|} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2}$$

L'objectif est de chercher les positions d'équilibre, c'est-à-dire les extrema de $\mathcal{E}_{\mathrm{p,tot}}(r)$, donc les extrema $V(r)$. L'avantage de $V(r)$ est qu'elle ne dépend pas des caractéristiques du système (comme sa masse), mais uniquement des propriétés de l'environnement.

⌂ La carte ci-dessous indique les iso-V et les flèches pointent vers les petites valeurs de V. Indiquer où se trouvent les « sommets », les « vallées » et les « cols » de l'énergie potentielle.



II.3 - Visualisation des points de Lagrange L1, L2 et L3

Écrire le script Python suivant.

- Définir les constantes utiles : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot kg^{-2} \cdot m^2}$, $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$, $M_T = 6{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $\omega = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$.
- Définir un array de position allant de $-2{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$ à $3{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$ et de taille 20 000.
- Calculer $V(r)$ et le tracer.

- Spécifier les limites des axes et ajouter une grille pour l'esthétique.

```
ax.set_xlim([r[0], r[-1]])
ax.set_ylim([-1e10, 0])
ax.grid(True)
```

Conclure. Combien de points de Lagrange observe-t-on ? Sont-ils stables ?

Écrire le script Python suivant.

- Calculer numériquement la dérivée de du potentiel $V'(r)$.
- Tracer $V'(r)$ dans un nouveau graphique.
- Spécifier les limites des axes et ajouter une grille pour l'esthétique.

```
ax2.set_xlim([r[0], r[-1]])
ax2.set_ylim([-0.1, 0.1])
ax2.grid(True)
```

Repérer visuellement les points de Lagrange sur ce graphique.

II.4 - Détermination précise de L_2

Nous allons maintenant chercher à déterminer précisément L_2, le point situé au-delà de l'orbite de la Terre, par **dichotomie**.

Dans cette région de l'espace, le potentiel s'écrit :

$$V(r > R) = -G\frac{M_S}{r} - G\frac{M_T}{r-R} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V'(r > R) = G\frac{M_S}{r^2} + G\frac{M_T}{(r-R)^2} - \omega^2 r}$$

On cherche ainsi le 0 de la fonction V.

<u>Rappel</u> : principe d'un algorithme de recherche d'un 0 d'une fonction par dichotomie.

- Définir la fonction $f(x)$.
- Définir un intervalle de recherche I (liste à deux éléments) **dans lequel la fonction $f(x)$ est strictement monotone et passe par 0**.
- Définir une précision de recherche ε.
- Définir une boucle $while$ à exécuter tant que la longueur de l'intervalle de recherche est supérieure à la précision souhaitée. À l'intérieur, on compare le signe de $f(milieu\ de\ l'intervalle)$ au signe de $f(bornes\ de\ l'intervalle)$. On redéfinit alors l'intervalle de recherche entre le $milieu$ et la $borne$ satisfaisant $f(milieu) * f(borne) < 0$. La longueur de l'intervalle est ainsi divisée par 2.

Trouver par dichotomie la position du point de Lagrange L_2 avec une précision de 100 km.

Le télescope spatial **James Webb**, lancé le 25 décembre 2021, a été placé sur le point de Lagrange L_2. Il possède une petite réserve de carburant lui permettant de réaliser des observations durant une dizaine d'années.

À combien de km de la Terre se trouve James Webb ? Pourquoi a-t-il besoin de carburant ?